

〔研究報告〕

わが国の統計学解説書に見られるFisherの直接確率法の 両側確率と片側確率をめぐる混乱

竹森 幸一¹⁾、三上 聖治²⁾、仁平 将³⁾、富田 恵¹⁾

要 旨

わが国の統計学解説書において、Fisherの直接確率法の解説が両側確率と片側確率をめぐる混乱していることを述べた。解説の主な相違点はFisherの直接確率法の分布は左右対称ではなく、例外的に行あるいは列の合計が等しい場合に左右対称になるとするもの（解説類型1）と、分布は左右対称であるので、両側確率は片側確率の2倍となるというもの（解説類型2）である。SPSS、Excel統計、SASの3種類の統計ソフトについて、Fisherの直接確率法のアルゴリズムを比較したところ、いずれも解説類型1の方法であった。

キーワード：Fisherの直接確率法、両側確率、片側確率、アルゴリズム、統計学解説書

I. はじめに

2×2表のカイ二乗検定は各セルの観察度数が期待度数に対して、どちらに偏っているかを明確に示すことができることから、医学、看護学領域でもよく用いられる。2×2表のカイ二乗検定は各セルの期待度数が5以上である必要があり、この条件が満たされない場合はFisherの直接確率法によって独立性の検定が行われる。

2×2表の実測度を a 、 b 、 c 、 d とすると、帰無仮説「行と列は互いに独立」のもとで、観察された実測度数を得る確率 p は

$$p = \frac{(a+b)!(c+d)!(a+c)!(b+d)!}{(a+b+c+d)!a!b!c!d!}$$

と表される。

片側確率は期待度数からみて観察パターンの方向へさらに片寄ったパターンの起こる確率を加えた確率で、両側確率はデータが取り得る全てのパターンの確率の中で、観察パターンの起こる確率と同等あるいはそれより小さい確率を全て合計した確率である。なお、片側検定は新薬などの効果検証をする場合など対立仮説が方向性を持つ場合に使用し、両側検定は2つの標本などが違うことを証明する場合など対立仮説が方向性を持たない場合に使用する。

1997年¹⁾と2006年²⁾に市販の統計学解説書において、Fisherの直接確率法の解説が両側確率と片側確率をめぐる混乱していることを述べた。本報では2005年1月から2013年3月末までに発行された主として弘前医療福祉大学図書館所蔵の統計関連図書を資料に、Fisherの直接確率法の両側確率と片側確率をめぐる混乱がその後、改善されているかをみた。

II. 資料と方法

2005年1月から2013年3月末までに発行された主として弘前医療福祉大学図書館所蔵の統計関連図書を資料とした。

Fisherの直接確率法の解説が掲載されている統計学解説書を解説の内容により類型化した。統計学解説書は様々な背景の著者が執筆しているので、著者の専門と解説の類型との関連を見た。

市販されている主な統計ソフトが採用しているアルゴリズムおよび計算結果を比較した。

解説の主な相違点であるFisherの直接確率法の分布は左右対称か否かを例題をもとに検証した。

本研究は市販されている図書および統計ソフトを資料としているので、倫理審査の対象とはならない。

1) 弘前医療福祉大学保健学部 (〒036-8102 弘前市小比内3-18-1)

2) 弘前学院大学看護学部 (〒036-8577 弘前市稔町13-1)

3) 元八戸保健所長

表1 Fisherの直接確率法についての解説の類型

- 1群 片側確率と両側確率の求め方が示されており、片側確率は観察データの一方の側に極端な観察パターンが得られる確率の和で、両側確率は観察データについて計算された確率と同等あるいはそれより小さい確率のすべてを合算した確率であると解説しているもの
- 2群 両側確率は片側確率を2倍するというもの
- 3群 1群と2群の両方について解説しているもの
- 4群 片側確率についてのみ解説しているもの
- 5群 両側確率についてのみ解説しているもの

表2 解説書の類型(群)と著者の専門の関連

解説書の類型	群	著者の専門		合計
		数学, 理工, 統計など	医学, 保健, 農学など	
解説書の類型	1, 3群	1	3	4
	2, 4, 5群	7	6	13
合計		8	9	17

Fisherの直接法 $p=0.576$ (両側確率)

Ⅲ. 結果および考察

1) 解説書の類型

解説の主な相違点はFisherの直接確率の分布は左右対称ではなく、例外的に行あるいは列の合計が等しい場合に左右対称となるとするものと、分布は左右対称であるので、両側確率は片側確率の2倍となるというものであった。調査した解説書109冊中17冊にFisherの直接確率法の解説が掲載されており、これらは解説の内容から表1の5群に分類された。各群の冊数と割合は1群2冊(12%)^{3,4)}、2群8冊(47%)⁵⁻¹²⁾、3群2冊(12%)^{13,14)}、4群4冊(24%)¹⁵⁻¹⁸⁾、5群1冊(5%)¹⁹⁾で、2群(両側確率は片側確率を2倍するというもの)が最も多かった。引用文献欄では同じ版が再販されている場合は刷数を示し、その刷の年号を示した。

2) 著者の専門と解説類型の関連

統計学解説書は様々な背景の著者が執筆しているので、著者の専門と表1の解説の類型との関連を見た。著者を数学、理工学、統計学など統計学の専門に近い群と医学、保健学、農学などの群に分け、先の解説を類型1、3群と2、4、5群の2つの群に分け、著者の専門との関連を見た。表2に示したように、Fisherの直接確率は $p=0.576$ (両側確率)で、両者間には関連が見られなかった。

3) 統計ソフトのアルゴリズムの比較

Fisherの直接確率を解説書に基づいて手計算するのはかなり煩雑なので、統計ソフトを使うことが多い。そこで、SPSS、Excel統計、SASの3種類のソフトについて、Fisherの直接確率法のアルゴリズムを比較した。SPSSのアルゴリズム²⁰⁾は

The exact one-tailed significance level p_1 is defined as

$$p_1 = \begin{cases} \text{Prob}(N_1 \geq n_1) & \text{if } n_1 > E(N_1) \\ \text{Prob}(N_1 \leq n_1) & \text{if } n_1 \leq E(N_1) \end{cases}$$

where $E(N_1) = (n_1 + n_2)(n_1 + n_3) / N$

The exact two-tailed significance level p_2 is defined as the sum of the one-tailed significance level p_1 and the probabilities of all points in the other side of the sample space of N_1 which are not greater than the probability of $N_1 = n_1$.

と述べている。Excel統計²¹⁾もSAS²²⁾も同じ考え方で、先の解説の類型1群と同様であった。

4) 統計ソフトSPSS、Excel統計、SASによる計算結果の比較

そこで、SPSS (Ver.17.0)、Excel統計 (2012)、SAS (Ver.9.2)を用いて、表3の3例題について計算結果(両側確率と片側確率)を比較した。例1は行の合計が同じで、例2は列の合計が同じである。例3は行、列の合計とも同じでない例題である。結果は表3に示したように、SPSSの結果が他の2者の少数第4位を四捨五入し

表3 行または列の合計が等しい場合と行、列の合計がともに等しくない場合の3種類の統計ソフトの計算結果（両側確率と片側確率）の比較

	例1			例2			例3					
	A	a	b	合計	A	a	b	合計	A	a	b	合計
	B	3	2	5	B	3	4	7	B	1	5	6
	合計	4	6	10	合計	5	5	10	合計	3	11	14
	両側確率	片側確率			両側確率	片側確率			両側確率	片側確率		
SPSS(Ver.17.0)	0.524	0.262			1.000	0.500			1.000	0.615		
Excel統計(2012)	0.5238	0.2619			1.0000	0.5000			1.0000	0.6154		
SAS(Ver.9.2)	0.5238	0.2619			1.0000	0.5000			1.0000	0.6154		

表4 行の合計が同じ場合と違う場合の両側確率と片側確率

パターン	1	2	3	4	5
	3 0 3 1 6 7 4 6 10	3 1 4 1 5 6 4 6 10	3 2 5 1 4 5 4 6 10	3 3 6 1 3 4 4 6 10	3 4 7 1 2 3 4 6 10
両側確率	0.0333	0.1905	0.5238	0.5714	1.0000
片側確率	0.0333	0.1190	0.2619	0.4524	0.6667
片側確率×2	0.0666	0.2380	0.5238	0.9048	1.3334

表5 表4のパターン3（行合計が等しい例）の取りうるすべてのパターンとその確率

パターン	観察パターン				
	4 1 5 0 5 5 4 6 10	3 2 5 1 4 5 4 6 10	2 3 5 2 3 5 4 6 10	1 4 5 3 2 5 4 6 10	0 5 5 4 1 5 4 6 10
確率	0.0238	0.2381	0.4762	0.2381	0.0238

片側確率= 0.2381+0.0238=0.2619
 両側確率= 0.2381+0.0238+0.2381+0.0238=0.5238

た表示になっているが、基本的には同じであった。行あるいは列の合計が同じ場合は両側確率が片側確率の2倍になっているが、行、列の合計がともに違う場合は2倍になっていない。例3の場合、片側確率0.6154を2倍すると1.2308となり、確率が1を超える。

5) 行の合計が同じ場合と違う場合の両側確率と片側確率

表4に行の合計が同じ場合と違う場合についてのExcel統計2012による両側確率と片側確率を示した。パターン3が行の合計が同じ場合で、パターン3の左右は行の合計が少しずつ違ってくる場合を示している。パターン3は片側確率の2倍が両側確率になっているが、パターン1、2、4、5のように行の合計が違ってくる

と片側確率の2倍が両側確率と違ってくる。

表5に表4のパターン3が取りうるすべてのパターンとその確率を示した。表6に表4のパターン2が取りうるすべてのパターンとその確率を示した。観察パターンと同等あるいはそれより小さい確率のパターンを網かけにした。行の合計が等しい場合（表5）は片側確率と同じ確率が対称的に反対側にあり、片側確率の2倍が両側確率になるが、行の合計が違う場合（表6）は片側確率と違う確率が反対側にあり、片側確率の2倍が両側確率にはならない。

解説類型2群の文献8では観察パターンの下側の3通りの確率を加えて片側確率（0.015）とし、両側確率は上側の3通りの確率（0.031）をこれに加えて0.046としている。これは分布が「左右対称である」という考え方

表6 表4のパターン2（行合計が違う例）の取りうるすべてのパターンとその確率

パターン	観察パターン				
	4 0 4	3 1 4	2 2 4	1 3 4	0 4 4
	0 6 6	1 5 6	2 4 6	3 3 6	4 2 6
	4 6 10	4 6 10	4 6 10	4 6 10	4 6 10
確率	0.0048	0.1143	0.4286	0.3810	0.0714
片側確率=	0.1143+0.0048=0.1191				
両側確率=	0.1143+0.0048+0.0714=0.1905				

表7 文献11、119ページの例題

パターン	観察パターン				
	0 19 19	1 18 19	2 17 19	3 16 19	4 15 19
	5 4 9	4 5 9	3 6 9	2 7 9	1 8 9
	5 23 28	5 23 28	5 23 28	5 23 28	5 23 28
確率	0.0013	0.0244	0.1462	0.3549	0.3549
片側確率=	0.0013+0.0244=0.0257				
両側確率=	0.0257 × 2 = 0.0514				

に基づくものと考えられる。しかし、上側3通りの中には観察パターンの確率0.013883より大きい確率0.027765が含まれ、解説類型1群の考えではこれを加えず両側確率は0.0183となる。

解説類型2群の文献11では表7の観察パターンについて片側確率と両側確率を計算し、それぞれ0.0257、0.0514 (0.0257 × 2) とし、両側確率は有意水準5%でわずかに有意とはならないと結論している。しかし観察パターンと同等あるいはそれより小さい確率は反対側にはなく、解説類型1群の考え方では両側確率は片側確率と同じで0.0257となり、有意水準5%で有意となる。

IV. まとめ

統計学解説書には片側検定と両側検定に対応するため、両方の確率計算方法について解説する必要があるものとする。片側確率の計算方法は全て同じであるが、両側確率は表1に述べたように解説類型の1群と2群に大別される。2群は何の条件も示さず「2倍する」という表記と、「簡便法として2倍する」という表記があるが、いずれも1群の両側確率とは大きく異なる場合がある。著者としてはこの1群が推奨できる方法であると考えられる。統計ソフトでFisherの直接確率を計算した学生など入門者は、両側確率が片側確率の2倍にならない例題に遭遇したとき、「両側確率は片側確率の2倍である」という解説書との矛盾を感じることであろう。本研究の資料は1大学の図書館所蔵の図書に限られているが、市

販されている統計学解説書の基本的なものは大方そろっている。またこれらの資料は特殊なものではなく、他の図書館でも閲覧可能なものである。

さきに^{1,2)}、2006年までに発行された統計学解説書において、Fisherの直接確率法の解説が混乱していることを述べた。本研究でその後発行された解説書について調査したが、この混乱は全く改善されていないことが判明した。この混乱を収束させるためには、解説書の著者に本稿を提示し、それぞれの解説の背景について尋ね、混乱の要因について検討することが必要であると考えられる。

本研究は弘前医療福祉大学平成25年度学長指定研究助成金によって行われた。

(受理日 平成26年3月3日)

引用文献

- 1) 竹森幸一, 三上聖治: Fisherの直接確率法をめぐる混乱. 医学のあゆみ. 181(8): 558-560, 1997
- 2) 竹森幸一: 統計学入門書に見られるFisherの直接確率法の両側確率と片側確率をめぐる混乱. 青森保健大雑誌. 7(2): 187-190, 2006
- 3) Stanton A. Glantz (足立堅一監訳): 基礎から理解できる医学統計学 (1版1刷). 165-168. 東京: 篠原出版新社. 2008
- 4) 縣 俊彦: 基本医学統計学EBM・医学研究・SASへの応用 (5版1刷). 50-52. 東京: 中外医学社.

- 2009
- 5) 大櫛陽一, 他: SPSSによる看護・福祉・医学統計入門 (1版2刷). 94-99. 東京: 福村出版. 2005
 - 6) 佐藤敏雄, 他: やさしい医療系の統計学 (2版5刷). 129-130. 東京: 医歯薬出版. 2007
 - 7) 三野大来: 看護師のための統計学 (1版3刷). 151-153. 東京: 共立出版. 2008
 - 8) 高木廣文: ナースのための統計学 (2版1刷). 139-144. 東京: 医学書院. 2009
 - 9) 宮原英夫, 他編: 医学統計学ハンドブック (1版8刷). 177-179. 東京: 朝倉書店. 2009
 - 10) 鶴飼保雄: 統計学への開かれた門 (1版1刷). 157-160. 東京: 養賢堂. 2010
 - 11) 丹後俊郎: 新版医学への統計学 (1版19刷). 119-121. 東京: 朝倉書店. 2012
 - 12) 加納克己, 他: 基礎医学統計学 (6版3刷). 76-78. 東京: 南江堂. 2012
 - 13) 出村慎一: 例解 健康・スポーツ科学のための統計学 (2版2刷). 149-153. 東京: 大修館書店. 2007
 - 14) Douglas G. Altman (木船義久・他訳): 医学研究における実用統計学 (1版5刷). 209-212. 東京: サイエンティスト社. 2011
 - 15) ジェフリー R. ノーマン・他 (中野正孝他・訳): 論文が読める! 早わかり統計学 (2版3刷). 121-124. 東京: メディカル・サイエンス・インターナショナル. 2007
 - 16) 福森 貢, 他: 実践 看護・医療系データ分析のための基本統計ハンドブック (1版1刷). 57-60. 東京: ピラールプレス. 2012
 - 17) 今野秀二, 他: 医学・薬学系のための生物統計学入門 (2版1刷). 86-88. 東京: ムイスリ出版. 2008
 - 18) 正井栄一: 医学・保健学のためのやさしい統計学 (2版3刷). 140-141. 東京: 金原出版. 2010
 - 19) David Edward Matthews, 他 (宮原英夫, 他監訳): 実践医学統計学 (1版1刷). 17-22. 東京: 朝倉書店. 2005
 - 20) Introduction to Algorithms: Background (Significance Levels for Fisher's Exact Test) (SPSSのヘルプ、アルゴリズムに記載)
 - 21) <http://aoki2.si.gunma-u.ac.jp/lecture/Cross/Fisher.html>
 - 22) SAS/STAT(R) 12.1 User's Guide: http://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/65328/HTML/default/viewer.htm#statug_freq_details08.htm

Confused understanding in statistical handbooks in Japan over two-tail probability and one-tail probability in the Fisher's exact probability test

Koichi Takemori¹⁾ Seiji Mikami²⁾ Susumu Nihira³⁾ Megumi Tomita¹⁾

1) School of Health Sciences, Hirosaki University of Health and Welfare (3-18-1 Sanpinai, Hirosaki 036-8102, JAPAN)

2) Faculty of Nursing, Hirosaki Gakuin University (13-1 Minoricho, Hirosaki 036-8231, JAPAN)

3) Former Head of Hachinohe Health Center

Abstract

In statistical handbooks in Japan, commentary on the Fisher's exact probability test showed confusion over two-tail probability and one-tail probability. There are two types of differing commentaries. In commentary type 1, the distribution of the Fisher's exact probability is not always symmetrical, becoming symmetrical only in exceptional cases when the total of a row or a column is equal. In commentary type 2, the distribution is always symmetrical, and the two-tail probability is twice that of the one-tail probability. As for SPSS, Excel Statistics and SAS statistics software, when the algorithms of the Fisher's exact probability were compared, all three were found to be that of commentary type 1.

Key words : Fisher's exact probability test, two-tail probability, one-tail probability, algorithm, statistical handbook